

Computergestützte Untersuchung topologischer Eigenschaften mehrdimensionaler Räume

mit Anwendungen zur Visualisierung und Bildanalyse

(Preprint)

Wladimir Kovalevski

Universität Rostock

Fachbereich Informatik

Albert-Einstein-Straße 21, 18051 Rostock, Deutschland

kovalev@tfh-berlin.de

Diese Arbeit wurde mit Förderung der Deutschen Forschungsgemeinschaft

(AZ: SCHU 887/4-2) durchgeführt

Kurzfassung

Eine neue Methode der Untersuchung von topologischen Eigenschaften zwei- und dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten mit Hilfe des Computers wird dargestellt. Mannigfaltigkeiten werden als endliche abstrakte Komplexe dargestellt. Die Methode basiert auf einer Zerlegung des vorgegebenen Komplexes in Blöcke, wobei jeder k -dimensionale Block einer topologischen k -Kugel homöomorph ist. Die Menge der Blöcke wird mit der Datenstruktur beschrieben, die als Zellenliste bekannt ist. Diese wird hier für den dreidimensionalen Fall und für nicht kartesische Räume verallgemeinert. Die verallgemeinerte Zellenliste enthält eine Teilstruktur, die im zweidimensionalen Fall mit der klassischen Normalform identisch ist. Diese Struktur im dreidimensionalen Fall ist eine Verallgemeinerung der Normalform auf 3-Mannigfaltigkeiten. Ergebnisse von Experimenten werden mitgeteilt.

Abstract

A new method of investigating topological properties of three-dimensional manifolds by means of computer is presented. Manifolds are represented as finite abstract complexes. The method is based on subdividing a given complex into blocks in such a way, that a k -dimensional block be homeomorphic to a k -dimensional topological ball. The block structure is described by the data structure known as "cell list" which is generalized here for the three-dimensional case and for non-Cartesian spaces. The generalized cell list contains a substructure which in the 2D-case is identical with the classical normal form. This structure serves in the 3D-case as a generalization of the normal form for three-dimensional manifolds. Some experimental results are presented.

Inhalt:

0. Einleitung	S. 2
1. Theorie der Zellenlisten	
1.1 Abstrakte Komplexe und Blockkomplexe	S. 2
1.2 Topologische und geometrische Zellenlisten	S. 4
1.3 Kartesische ACC's und topologische Koordinaten	S. 4
1.4 Informationsinhalt der Zellenlisten, Inzidenzstrukturen	S. 6
2. Zweidimensionale Zellenliste	
2.1 Struktur der zweidimensionalen Zellenliste	S. 9
2.2 Binärbilder bilden unechte Blockkomplexe	S. 12
2.3 Theoretische Aspekte der automatischen Erzeugung von Zellenlisten	S. 13
2.4 Verfahren zur Untersuchung von 2D Mannigfaltigkeiten	S. 15
3. Dreidimensionale Zellenliste	
3.1 Theorie der topologischen dreidimensionalen Zellenliste	S. 17
3.2 Struktur der topologischen dreidimensionalen Zellenliste	S. 21
3.3 Erzeugung der Zellenliste einer 3-Mannigfaltigkeit	S. 24
3.4 Experimentelle Ergebnisse	S. 27
4. Schlußfolgerung	S. 28
5. Zitierte Literatur	S. 28
Anlage 1: Topologie der abstrakten Komplexe	S. 30

Einleitung

Der Begriff der Zellenliste wurde vor längerer Zeit eingeführt (Kov 89), aber eine vollständige theoretische Untersuchung dieser Datenstruktur vom Standpunkt der Topologie wurde erst im Laufe dieses Vorhabens unternommen. Für diese Untersuchung haben wir den Begriff eines Blockkomplexes (Kov 89) benutzt, der viel Ähnlichkeit mit dem klassischen Begriff einer Zellenzerspaltung (Rin 75) hat. Wir haben sowohl die topologischen Eigenschaften verschiedener Varianten der Zellenliste als auch ihre Vor- und Nachteile für Anwendungen untersucht und Zellenlisten für die Untersuchung von zwei- und dreidimensionalen Mannigfaltigkeit eingesetzt.

1 Theorie der Zellenlisten

1.1 Abstrakte Komplexe und Blockkomplexe

Aus der klassischen topologischen Literatur (Rin 75) ist der Begriff einer Zellenzerspaltung bekannt. Eine topologische Struktur wird auf einer Zellenzerspaltung definiert, indem man die Zellen als Teilmengen eines euklidischen Raumes betrachtet. Eines unserer Ziele ist es aber, eine auf digitalisierte zwei- und dreidimensionale Bilder *unmittelbar* anwendbare Theorie aufzubauen. Diese Theorie soll keinen Bezug auf unendliche Mengen, zu denen auch der euklidische Raum gehört, benutzen. Die Theorie basiert auf *abstrakten Komplexen* (Kov 89).

Abstrakte Komplexe (ACC's) unterscheiden sich von den allgemein benutzten simplizialen und euklidischen Komplexen nicht nur durch ihre Unabhängigkeit vom euklidischen Raum. Ein weiterer Unterschied besteht darin, daß abstrakte Zellen sich nicht überschneiden: Eine Seite einer abstrakten Zelle ist keine Teilmenge dieser Zelle. Gerade diese Besonderheit der abstrakten Zellen ermöglicht die Definition einer Topologie im klassischen Sinne auf ACC's ohne Bezug auf einen euklidischen Raum.

Für unsere Untersuchungen benötigen wir den klassischen Begriff des *Homöomorphismus*. Wir haben eine Übertragung dieses Begriffs auf abstrakte Komplexe der Dimensionen 2 und 3 definiert: Zwei ACC's der Dimension 2 oder 3 sind homöomorph, wenn Unterteilungen dieser ACC's existieren, die zu einander isomorph sind. Auf eine vollständige Erläuterung dieser Definition müssen wir *hier* verzichten, da sie den Umfang dieses Preprints sprengen würde.

Die Struktur eines Komplexes, ob abstrakten oder simplizialen, ist meistens zu fein: Ein Komplex enthält zu viele Elemente, was die Untersuchung seiner globalen Eigenschaften, ob topologischen oder geometrischen, erschwert. Es ist für viele Zwecke günstig, die Zellen in größere Strukturen zu vereinigen.

Im weiteren benutzen wir Begriffe aus der Theorie der abstrakten Komplexe (Kov 89). Die meisten von ihnen, wie Begrenzung, Zusammenhang u.ä. sind den klassischen Begriffen ähnlich. Zum Nachschlagen ist eine Kurzfassung der wichtigsten Definitionen in Anlage 1 zu finden.

Gegeben sei ein n -dimensionaler ACC A mit $n=1, 2$ oder 3 . Wir bezeichnen mit M eine Zerlegung von A in Teilmengen, wobei jede Teilmenge entweder aus einer 0-Zelle (d.h. aus einem Punkt) besteht, oder einer *offenen* k -dimensionalen Kugel (k -Kugel) homöomorph ist. Der Durchschnitt von je zwei Teilmengen ist immer leer.

Ein Element von M heißt eine *k -dimensionale Blockzelle* oder k -Blockzelle von A . Die Dimension einer Blockzelle ist gleich der größten Dimension der Zellen von A , die zur entsprechenden Teilmenge von A gehören. Damit ist auf M eine *Dimensionsfunktion* $\text{dim}: M \rightarrow \mathbf{Z}$ definiert, wobei \mathbf{Z} die Menge der nicht negativen ganzen Zahlen ist.

Es seien z_1 und z_2 Blockzellen aus M , die jeweils den Teilmengen T_1 und T_2 aus A entsprechen. Die Blockzelle z_1 berandet z_2 , wenn T_1 eine Zelle enthält, die eine Zelle von T_2 berandet. Die Menge BR aller Paare (z_1, z_2) , wobei z_1 berandet z_2 , heißt *Berandungsrelation auf M* .

Definition BL: Das Tripel $B(A) = (M, BR, \text{dim})$ heißt *Blockkomplex von A* .

Offensichtlich ist $B(A)$ ein ACC. Abb. 1 zeigt ein einfaches Beispiel eines zweidimensionalen Blockkomplexes.

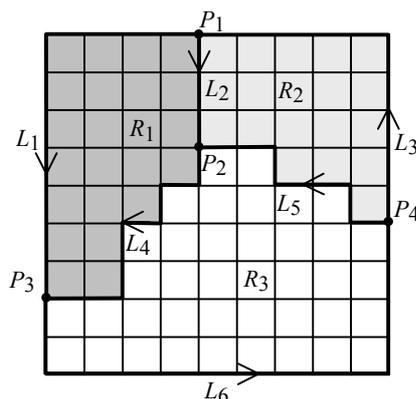


Abb. 1. Beispiel eines zweidimensionalen Blockkomplexes
 P_i sind die 0-Blöcke (Punkte), L_j sind die 1-Blöcke (Linien)
 und R_k sind die 2-Blöcke (Regionen oder Gebiete)

Unser Begriff eines Blockkomplexes unterscheidet sich von dem der Zellenspaltung nach (Rin 75, S. 531) dadurch, daß die Blockzellen *disjunkt* sind. Dadurch kann jede Blockzelle der höchsten Dimension als eine *offene Teilmenge* von $B(A)$ deklariert werden. Auf Grund der klassischen Axiome der offenen Mengen ergibt sich sofort eine T_0 -Topologie auf $B(A)$ und damit wird $B(A)$ zu einem T_0 -Raum im klassischen Sinne. Auf die gleiche Weise wurde in (Kov 89) eine Topologie auf einem allgemeinen ACC definiert. Der Raum von $B(A)$ ist ein Quotientraum des Raumes von A . Es soll aber betont werden, daß die so definierten topologischen Räume *keine Quotienträume* eines euklidischen Raumes sind. Sie wurden unabhängig vom jeglichen Hausdorffschen Raum definiert.

1.2 Topologische und geometrische Zellenlisten

Für viele Anwendungen ist die Einbettung eines Komplexes in einen bestimmten topologischen Raum von Interesse. So z.B. ist es wichtig, einen zweidimensionalen Komplex in die digitale Ebene oder einen dreidimensionalen in den digitalen 3D-Raum einzubetten. Die Einbettung ist durch die Struktur eines ACC *nicht* definiert: Ein und denselben ACC kann man auf verschiedene Weise einbetten. Um die Einbettung eines Blockkomplexes zu definieren, wurde die Struktur einer *Zellenliste* eingeführt (Kov 89, Kov 92). In den bisherigen Publikationen war nur von einer geometrischen Zellenliste die Rede. Dies bedeutet, die Einbettung wurde geometrisch durch Koordinaten bestimmter Punkte definiert. Jetzt schlagen wir vor, zwischen einer *geometrischen* und einer *topologischen* Zellenliste zu unterscheiden: Eine topologische Zellenliste definiert die Einbettung nur *bis auf einen Homöomorphismus des Raumes*, in den eingebettet werden soll. Das bedeutet, daß eine topologische Zellenliste keine Koordinaten enthalten soll. Zusätzlich zu der Struktur eines ACC's werden Daten über die "Anordnung" der Zellen angegeben. Dieser Begriff wird im Weiteren präzisiert. Eine geometrische Zellenliste dagegen soll alle notwendigen geometrischen Daten enthalten, die es ermöglichen, ein zwei- oder dreidimensionales Bild mit Hilfe der geometrischen Zellenliste so zu codieren, daß dieses Bild aus der Zellenliste mit einer vorgegebenen Genauigkeit, evtl. ganz genau, *wiederhergestellt* werden kann.

Geometrische Zellenlisten dienen hauptsächlich dem Zweck der Bildanalyse da aus dieser Liste geometrische Eigenschaften von Bildteilen, z.B. der Flächeninhalt oder Umfang von Gebieten, ihre topologische Relationen, wie gemeinsame Begrenzung, Enthaltung eines Gebietes im anderen u.ä., bestimmt werden können.

Topologische Zellenlisten sollen zur Untersuchung der topologischen Äquivalenz (Homöomorphismus) von Mengen beitragen. Dies wird weiter unten ausführlich beschrieben.

1.3 Kartesische ACC's und topologischen Koordinaten

In der geometrischen Zellenliste soll die Lage jedes Blocks in der digitalen Ebene oder im digitalen 3D-Raum definiert werden. Dazu dienen topologische Koordinaten (Kov 92), die wiederum unabhängig von einem euklidischen Raum wie folgt eingeführt werden:

Man betrachte n endliche *eindimensionale* ACC's X_i , mit $i=1, 2, \dots, n$. Den Zellen eines jeden X_i werden nacheinander folgende ganze Zahlen zugewiesen und zwar so, daß jede 0-Zelle eine gerade und jede 1-Zelle eine ungerade Zahl zugewiesen bekommt. Dabei berandet eine Zelle mit der Zahl $2n$ die Zellen mit den Zahlen $2n-1$ und $2n+1$ (außer am Anfang oder am Ende der Folge). Diese Zahlen definieren wir als *topologische Koordinaten* der Zellen innerhalb des entsprechenden ACC's X_i .

Es sei S_i die Menge der Zellen von X_i , $i=1, 2, \dots, n$. Wir betrachten das kartesische Produkt (Kreuzprodukt) $\mathcal{S} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$. Elemente s der Menge \mathcal{S} sind Mengen aus jeweils n Elementen $s = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in X_i$, wobei die letzteren *Komponenten* von s heißen. Diese Elemente s erklären wir zu den Zellen eines neuen ACC's $K^n = (\mathcal{S}, BR_s, \dim_s)$. Die neue Dimensionsfunktion $\dim_s(s)$ wird durch die Summe der Dimensionen definiert:

$$\dim_s(s) = \dim_1(x_1) + \dim_2(x_2) + \dots + \dim_n(x_n),$$

wobei $\dim_i(x_i)$ die Dimension der Zelle x_i in dem ACC X_i ist.

Die Berandungsrelation BR_s wird wie folgt definiert:

Eine Zelle $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u \in \mathcal{S}$, berandet eine von u unterschiedliche Zelle $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $v \in \mathcal{S}$, wenn für alle Komponenten gilt: $\dim_i(x_i) \leq \dim_i(y_i)$, wobei entweder $x_i = y_i$ oder x_i berandet y_i , $i=1, 2, \dots, n$.

Definition KK: Der oben definierte ACC K^n heißt ein n -dimensionaler kartesischer abstrakter Komplex (oder n -dimensionaler kartesischer ACC). Die *topologischen Koordinaten* der Zelle $s=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $s \in \mathcal{S}$, werden durch den n -dimensionalen Vektor definiert, deren Komponenten die Koordinaten der Zellen x_1, x_2, \dots, x_n in ihren eindimensionalen Komplexen X_i sind. Die letzteren sind die Koordinatenachsen des Raumes K^n .

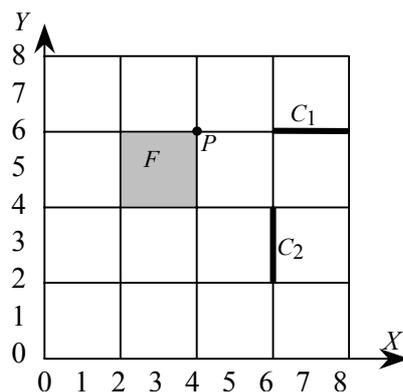


Abb. 2. Beispiel eines zweidimensionalen kartesischen Komplexes

Im Beispiel von Abb. 2 ist P eine nulldimensionale Zelle oder ein Punkt. Seine topologischen Koordinaten sind $(4, 6)$. C_1 ist eine eindimensionale Zelle oder ein waagerechter Crack. Seine topologischen Koordinaten sind $(7, 6)$. Die Koordinaten des senkrechten Cracks C_2 sind $(6, 3)$ und die der zweidimensionalen Zelle (Pixel) F sind $(3, 5)$.

Es folgt aus der Definition KK, daß die Dimension einer Zelle eines n -dimensionalen ACC's (n -ACC's) gleich der *Anzahl seiner ungeraden Koordinaten* ist. Diese Eigenschaft der topologischen Koordinaten wird bei der Untersuchung der n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten eine wichtige Rolle spielen.

Es soll hier betont werden, daß die topologischen Koordinaten ohne Bezug auf einen metrischen oder linearen Raum eingeführt worden sind. Dadurch bleibt unser topologisches Konzept nach wie vor unabhängig vom euklidischen Raum.

Als Nachteil der topologischen Koordinaten soll man bemerken, daß die Differenz der Koordinaten von zwei benachbarten 2-Zellen (Pixeln) nicht 1, wie üblich in der Computergrafik und Bildverarbeitung, sondern 2 ist. Dieser Nachteil läßt sich beseitigen, indem man "halbganzzahlige" Koordinaten für Zellen niederer Dimensionen einführt. Aber im Kontext der topologischen Untersuchungen spielt dieser Nachteil keine Rolle.

In geometrischen Zellenlisten können dagegen die topologischen Koordinaten so umgewandelt werden, daß sie wie die üblichen ganzzahligen Koordinaten aussehen. Dazu genügt es die topologischen Koordinaten durch 2 *mit Abrunden* zu dividieren. Dann haben zwar einige Zellen unterschiedlicher Dimensionen die gleichen Koordinaten, aber, weil bei geometrischen Untersuchungen meistens nur die Grundzellen (d.h. die Zellen der größten Dimension) benutzt werden, spielt dieser Umstand keine nachteilige Rolle.

1.4 Informationsinhalt der Zellenlisten, Inzidenzstrukturen

Bei Untersuchungen der topologischen Struktur von verschiedenen Mengen fällt es auf, daß in manchen Fällen die in der Struktur eines ACC's enthaltenen Daten nicht ausreichend sind. Als ein Beispiel wollen wir die in der topologischen Literatur übliche Darstellung der Oberfläche eines Torus betrachten (Abb. 3).

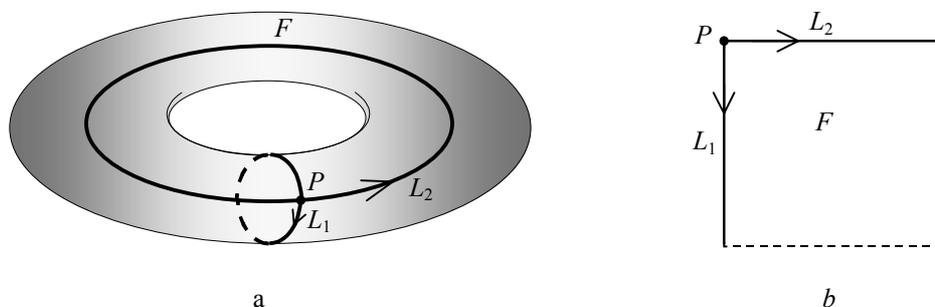


Abb. 3. Darstellung eines Torus (a) und eines einfachen Komplexes (b), welches zum Torus isomorph ist.

Einerseits ist die Darstellung günstig, weil sie nur wenige Zellen enthält. Andererseits gibt es bei dieser Art der Beschreibung einen Widerspruch: Beide Komplexe a) und b) in Abb. 3 sind topologisch nicht äquivalent, aber dargestellt als ACC's sind sie identisch: Die gleiche Menge $\{P, L_1, L_2, F\}$ von Zellen, die gleiche Berandungsrelation $\{(P, L_1,) (P, L_2), (P, F), (L_1, F), (L_2, F)\}$ und die gleichen Dimensionen.

Es gibt zwei Möglichkeiten, diesen Widerspruch zu beseitigen:

- Man kann solche Zellenkomplexe, wie in Abb. 3a, aus der Betrachtung ausschließen, indem man fordert, daß eine 1-Zelle von zwei *verschiedenen* 0-Zellen berandet wird, und eine 1-Zelle zwei *verschiedene* 2-Zellen berandet. Dann sollte man auch fordern, daß im "Umlauf" der Begrenzung einer 2-Zelle jede Zelle *nur einmal vorkommt*. Solche Komplexe wollen wir als *echte* bezeichnen. Diese Forderung läßt sich aber kaum in der Sprache der ACC's formulieren.
- Man kann Komplexe durch eine verallgemeinerte Zellenliste beschreiben, welche die Orientierung der Zellen berücksichtigt und für jede Zelle ihre Inzidenzstruktur enthält.

Die erste dieser Möglichkeiten wurde bei der Entwicklung der Testprogramme zur Untersuchung von Mannigfaltigkeiten benutzt. Wir beschreiben jetzt die zweite Möglichkeit.

Bevor wir eine formale Definition der Inzidenzstruktur bringen, zeigen wir ein Beispiel der weiter entwickelten zweidimensionalen Zellenliste, die im Vergleich zu der ursprünglichen Form (Kov 89) verallgemeinert wurde: Die ursprüngliche Form war für kartesische ACC's konzipiert, wo höchstens vier Linien mit einem Punkt inzident sein können. Die neue Form läßt beliebig viele Linien zu, was für Transformationen der topologischen Zellenlisten wichtig ist. Das Beispiel bezieht sich auf den Komplex von Abb. 3a.

Tabelle 1: Teilliste der Punkte:

Index	N_{inz}	Zeiger	Verkettete Liste
P	8	Z	$-L_1 \rightarrow F \rightarrow +L_2 \rightarrow F \rightarrow +L_1 \rightarrow F \rightarrow -L_2 \rightarrow F \rightarrow -L_1$
...			

Hier ist N_{inz} die Anzahl der mit P inzidenten Zellen. Wenn der Blockkomplex mehrere Punkte hat, wird jeder Punkt in einer Zeile der Tabelle beschrieben.

Die Teilliste der Punkte zeigt eine verallgemeinerte Zirkulation der Zellen in der Umgebung des jeweiligen Punktes. Der Begriff einer Zirkulation ist aus der Graphentheorie bekannt: Dort wird damit die Reihenfolge der mit einem Knoten inzidenten Kanten in einer planaren Einbettung des Graphen angegeben. Die Verallgemeinerung des Begriffs der Zirkulation besteht darin, daß wir zu den Linien die Gebiete hinzufügen. Das Zeichen "-" vor dem Index einer orientierten 1-Zelle bedeutet, daß sie vom Punkt weggeht. Die verkettete Liste ist das erste Beispiel einer Inzidenzstruktur. Im Fall des Komplexes von Abb. 3b hätte man als "Anzahl der Inzidenzen" 3 anstelle von 8 angegeben und die verkettete Liste wäre nicht geschlossen.

Tabelle 2: Teilliste der Linien:

Index	Startpunkt	Linke Fläche	Endpunkt	Rechte Fläche	Metrische Daten	
					Start	Ende
L_1	P	F	P	F		
L_2	P	F	P	F		

Diese Teilliste zeigt in jeder Zeile die Inzidenzstruktur einer Linie. Die Anzahl der Inzidenzen braucht im Fall einer Linie nicht angegeben zu werden: Sie ist in einem 2D-Blockkomplex immer gleich vier. Die fehlenden Inzidenzen im Falle Abb. 3b werden einfach durch "leere" Indizes, z.B. 0, angegeben.

Die Teilliste der Gebiete enthält wieder die Anzahl der Inzidenzen und eine verkettete Liste:

Tabelle 3: Teilliste der Gebiete:

Index	N_{inz}	Zeiger	Verkettete Liste
F	8	Z_1	$-L_1 \rightarrow P \rightarrow +L_2 \rightarrow P \rightarrow +L_1 \rightarrow P \rightarrow -L_2 \rightarrow P \rightarrow -L_1$
...			

Die Teilliste der metrischen Daten wurde auch verallgemeinert, indem man in dieser Liste nicht nur Parameter von Zerlegungen der Linien in digitale Strecken speichern kann, wie in (Kov 89) beschrieben, sondern auch nach Wahl einen Crack-Code oder Parameter von

approximierenden Polygonen. Mehr zu den metrischen Teillisten wird im Abschnitt 2 gesagt.

Es ist nicht schwer zu erkennen, daß eine Zellenliste redundant ist. Dies bezieht sich sowohl auf ihre ursprüngliche Form (Kov 89) als auch auf die eben beschriebene verallgemeinerte Form. Bei der letzteren ist die Redundanz so hoch, daß man eine vollständige topologische Information aus jeder der oben gezeigten Teillisten wiederherstellen kann. Die Redundanz wurde eingebaut, damit ein Zugriff auf jeden Bildteil ohne Suchen möglich ist. Dadurch kann die Bildanalyse beschleunigt werden. Bei topologischen Untersuchungen ist die Geschwindigkeit meistens nicht so wichtig. In solchen Fällen kann eine reduzierte topologische Zellenliste benutzt werden, z.B. eine Zellenliste, die allein aus der Teilliste der Gebiete besteht. Darüber mehr in den Abschnitten 2 und 3.

Eine *Inzidenzstruktur* einer Zelle bzw. Blockzelle Z ist eine formalisierte Beschreibung der topologischen Struktur der Menge der Zellen bzw. Blockzellen, die mit Z potentiell inzident sein können. Im obigen Beispiel war die Inzidenzstruktur eines Gebietes als eine geschlossene Folge von abwechselnden 0- und 1-Zellen dargestellt. Dies ist auch in jedem zwei-dimensionalen Komplex so, weil die Inzidenzstruktur eines Gebiets mit seiner Begrenzung identisch ist. Diese ist immer einer Kreislinie, d.h. einer eindimensionalen Sphäre S^1 homöomorph. Die Inzidenzstruktur einer 0-Zelle ist auch eine zyklische Folge, aber keine S^1 , weil die Dimensionen der Elemente dieser Folge andere sind.

Um diese Varianten zu verallgemeinern, wird der Begriff des B-Isomorphismus (Kov 94) benutzt:

Definition BI: Zwei ACC's heißen zu einander *B-isomorph*, wenn eine eindeutige Abbildung zwischen den Mengen ihrer Zellen existiert, welche die Berandungsrelation, aber nicht unbedingt die Dimension erhält.

Jetzt kann man sagen, daß die Inzidenzstruktur *einer jeden Zelle* aus einer endlichen 2-Mannigfaltigkeit der S^1 B-isomorph ist. In der Tat, bei einer 0-Zelle (Punkt) ist es eine geschlossene zyklische Folge von abwechselnden 1- und 2-Zellen (Tabelle 1). Die 1-Zellen werden durch den B-Isomorphismus auf die 0-Zellen und die 2-Zellen auf die 1-Zellen von S^1 abgebildet. Bei einer 1-Zelle (Linie) ist die Inzidenzstruktur eine geschlossene zyklische Folge von abwechselnden 0- und 2-Zellen (Tabelle 2). Die 0-Zellen werden auf die 0-Zellen und die 2-Zellen auf die 1-Zellen von S^1 abgebildet. In allen diesen Komplexen und bei allen Zellen, die in der Folge nebeneinander stehen, berandet eine Zelle der niedrigeren Dimension eine der höheren. Also bleibt die Berandungsrelation erhalten.

Die Inzidenzstrukturen in 3D-Komplexen sind komplizierter und werden im Abschnitt 3 beschrieben.

2 Zweidimensionale Zellenliste

In diesem Abschnitt wird die Weiterentwicklung der zweidimensionalen Zellenlisten beschrieben.

2.1 Struktur der zweidimensionalen geometrischen Zellenliste

Auf Grund der obigen Überlegungen kann die in (Kov 89) vorgeschlagene ursprüngliche Struktur einer zweidimensionalen *geometrischen* Zellenliste für Bilder, die als *kartesische ACC's* dargestellt sind, im Wesentlichen, mit geringen Änderungen, beibehalten werden. Dies ist für die Mehrheit der Rasterbilder der Fall, weil das Raster fast immer aus Zeilen und Spalten mit viereckigen Pixeln besteht. Eine solche Zellenliste besteht aus vier Teillisten: Liste der Verzweigungspunkte, Liste der Linien, Liste der Gebiete und Liste der metrischen Daten. Die folgenden Tabellen 4 bis 7 zeigen eine "klassische" Zellenliste für den Blockkomplex aus Abb. 1.

Tabelle 4: Geometrische Teilliste der Verzweigungspunkte

Index	Koordinaten		Inzidente Linien			
	X	Y	Lost	Lsüd	Lwest	Lnord
1	8	0	+3	-2	-1	0
2	8	12	+5	-4	0	+2
3	0	4	+4	-6	0	+1
4	18	8	0	+6	-5	-3

Tabelle 5: Geometrische Teilliste der Linien

Index	Endpunkte		Metrische Daten		Gebiete	
	Start	Ende	Start	Ende	Links	Rechts
1	1	3	1	1	1	0
2	1	2	-	-	2	1
3	4	1	2	2	2	0
4	2	3	3	3	3	1
5	4	2	-	-	3	2
6	3	4	4	5	3	0

Tabelle 6: Geometrische Teilliste der Gebiete

Index	Merkmal (Grauwert)	Startlinie
0	0	+1
1	100	+2
2	160	+5
3	255	-4

Tabelle 7: Teilliste der metrischen Daten (Zwischenpunkte)

Index	Koordinaten	
	X	Y
1	0	18
2	18	18
3	4	4
4	0	0
5	18	0

Es sind verschiedene Varianten von Zellenlisten denkbar: Für Binärbilder, für Grauwert- oder Farbbilder, wo für jedes Gebiet nur ein *konstanter* Grau- oder Farbwert gespeichert wird. Diese Varianten wurden bei der Durchführung dieses Vorhabens erfolgreich getestet. Es ist auch denkbar, Bilder *mit Shading*, wo die Farbe für jedes Gebiet als eine *glatte Funktion* dargestellt wird, oder Bilder, wo einige Gebiete eine *Textur* aufweisen, mit einer Zellenliste zu codieren.

Für Bilder mit Shading wurde ein neues Verfahren entwickelt, welches eine Näherungslösung des folgenden Problems realisiert:

Gegeben: Ein zweidimensionales Bild $GW(x, y)$ und eine Konstante K (Strafe für die Unglattheit).

Gesucht: Ein zweites gleich großes Bild $GR(x, y)$, welches die folgende Zielfunktion minimiert:

$$ZF(GR, GW) = \sum_{x,y} ((GR(x, y) - GW(x, y))^2 + K \cdot (D_{xx}(GR))^2 + K \cdot (D_{yy}(GR))^2); \quad (1)$$

wobei D_{xx} und D_{yy} die zweiten Differenz nach x und nach y sind:

$$\begin{aligned} D_{xx}(GR) &= GR(x+1, y) - 2 \cdot GR(x, y) + GR(x-1, y) \\ D_{yy}(GR) &= GR(x, y+1) - 2 \cdot GR(x, y) + GR(x, y-1). \end{aligned}$$

Im rechten Teil von (1) stellt der erste Term der Summe die quadratische Abweichung des approximierenden Bildes GR von dem gegebenen Bild GW dar. Der zweite Term beschreibt die Unglattheit von GR .

Diese *vereinfachte* Problemstellung ist für den Fall geeignet, wenn das ganze Bild ein *einziges Gebiet* mit einem verrauschten annähernd glatten Verlauf des Grauwertes ist. Im Realfall sind im Bild mehrere solche Gebiete enthalten und für jedes soll eine andere "glatte Regression" GR gefunden werden. Die Problemstellung und die Zielfunktion (1) lassen sich entsprechend umschreiben.

Die Zielfunktion ZF ist eine quadratische Funktion in den Unbekannten $GR(x,y)$. Demzufolge sind die ersten partiellen Ableitungen von ZF linear in GR und in GW . Daraus folgt, dass die Lösung linear von GW abhängt. Sie kann also mit einer passenden Faltung berechnet werden. Es ist uns gelungen, eine Näherungslösung für den Kern dieser Faltung zu finden. Wir verzichten hier auf eine tiefere Beschreibung der Lösung, weil sie nicht direkt zum Thema des Vorhabens gehört.

Im Falle von einzelnen Gebieten mit Texturen wird die Begrenzung eines solchen Gebietes mit einem der weiter unten beschriebenen genauen Verfahren (z.B. mit dem Crack-Code) in der Zellenliste codiert. Wir haben ein Verfahren entwickelt, mit dem ein zusammenhängendes Gebiet mit einer *beliebigen Form* seiner Begrenzung, auch ein nicht konvexes Gebiet, als ein Rasterbild gespeichert werden kann. Dabei wird nur so viel Speicherplatz verbraucht, wie es für die im Gebiet liegenden Pixel notwendig ist. Mit diesem Verfahren wird das Innere eines Gebietes mit Textur als ein kleines Rasterbild codiert. Dieser Code wird der Zellenliste zugefügt. Bei der Decodierung wird das Innere des Gebietes in das Bild wieder eingebaut.

Eine zweite Art der *Klassifizierung* von Zellenlisten bezieht sich auf die Darstellung der Begrenzungen von Gebieten: Man kann nach Wunsch die metrischen Daten als Parameter von maximalen digitalen Strecken (Kov 97) oder als Crack-Codes (Kov 94) angeben. Es ist auch möglich, Parameter von approximierenden Polygonen zu benutzen. Im letzteren Fall werden die Linien sparsamer als mit den anderen Verfahren codiert. Dafür ist aber diese Darstellung eine Näherung, deren Genauigkeit durch eine beliebig wählbare Toleranz bestimmt wird.

Im Falle einer Codierung der Linien durch maximale digitale Strecken (DSS's) gibt es zwei Möglichkeiten:

- a) Es werden nur die Koordinaten der Endpunkte der DSS's gespeichert. Dann ist die Codierung etwas ungenau: Durch zwei gegebene Punkte der digitalen Ebene können mehrere verschiedene DSS's gehen. Diese liegen aber im Abstand von höchstens einem Pixel von einander entfernt. Also kann das ursprüngliche Bild aus dem Code mit einer Ungenauigkeit von höchstens einem Pixel wiederhergestellt werden. Dies ist in vielen Fällen ausreichend.
- b) Es werden, zusätzlich zu den Koordinaten der Endpunkte drei Parameter für jede DSS gespeichert. Diese ermöglichen eine genaue Decodierung des Bildes. Der zusätzliche Speicheraufwand kann gering gehalten werden, wenn man diese Parameter komprimiert. Dann braucht man für eine vollständige und genaue Codierung im Durchschnitt 2,3 Byte pro DSS (Kov 97).

Alle diese Varianten wurden (mit Benutzung der bereits bestehenden Vorarbeit) erfolgreich getestet.

2.2 Binärbilder bilden unechte Blockkomplexe

Die Struktur eines zweidimensionalen Blockkomplexes beschreibt die Oberfläche eines abstrakten topologischen Polyeders ("abstrakt" bedeutet, ohne Einbettung in einen euklidischen Raum). Die 2-Blöcke müssen offenen Kreisscheiben homöomorph sein. Segmentierte zweidimensionale Bilder enthalten aber oft Gebiete, die dieser Forderung nicht entsprechen: Ein Gebiet muß nicht einfach zusammenhängend sein. Es gibt zwei Möglichkeiten, dieses Problem zu lösen:

- a) Wenn man die Zellenliste für topologische Untersuchungen anwenden möchte, dann sollen aus Gebieten echte (s. Abschnitt 1.4) Blockzellen gemacht werden, d.h. die Begrenzung jedes Gebietes soll mit der Begrenzung des umgebenden Gebietes durch mindestens eine Linie künstlich verbunden werden. Dadurch entstehen zusätzliche Linien, die eigentlich nicht zu den Begrenzungen gehören. Sie sind aber in der Zellenliste leicht zu erkennen, weil eine solche Linie an beiden Seiten Gebiete mit gleichen Merkmalen, wie Grauwert oder Farbe, hat. Der Nachteil eines höheren Speicheraufwands wird durch die topologische "Echtheit" des entsprechenden Blockkomplexes kompensiert.
- b) Wenn andererseits die Zellenliste nur für geometrische Untersuchungen vorgesehen ist, dann soll erlaubt sein, einen "unechten" Blockkomplex zu benutzen, d.h. Gebiete dürfen auch nicht einfach zusammenhängend sein. In diesem Fall kann ein Gebiet ein oder mehrere andere Gebiete enthalten und die Begrenzung des Gebietes muß nicht zusammenhängend sein. Eine solche Zellenliste kann zusätzlich mit einem sogenannten Enthaltungsbaum ausgerüstet sein: Es ist eine Struktur, die es erlaubt, für jedes Gebiet das ihn einschließende und alle in ihm eingeschlossenen Gebiete ohne Suchen zu erfassen. Das Verfahren zur automatischen Erzeugung eines Enthaltungsbaums wurde im Laufe diese Vorhabens entwickelt und erfolgreich getestet. Für eine Beschreibung fehlt aber in diesem Preprint der notwendige Platz.

Es gibt außerdem das Problem der kleinen Gebiete in einer Zellenliste. Gebiete oder 2-Blöcke wurden als offene Teilmengen definiert. Wenn im Bild eine dünne um 45° geneigte Linie als Folge von Pixeln dargestellt ist, dann ist jedes Pixel eine offene Teilmenge und damit ein Gebiet. Die Codierung eines solchen Bildes mit der Zellenliste kann sehr ungünstig wegen einer großen Anzahl von Gebieten werden. Man könnte diese Pixel zu einem "Objekt" zusammenfassen und das Objekt in die Zellenliste aufnehmen, aber dies wäre eine unsaubere Lösung: Ein Verstoß gegen die Definition mit den daraus folgenden topologischen Problemen.

Es gibt unter Fachkollegen die Meinung, daß man diese Situation einfach ignorieren soll, weil so ein Bild nur beim Abtasten mit einer nicht ausreichenden Auflösung vorkommt. Dann soll man eben das Bild "richtig" abtasten. Wir sind aber der Meinung, daß dies keine Lösung ist: Ein Bild ist da und man muß imstande sein, es richtig zu codieren und auszuwerten. Wir schlagen die folgende Lösung vor:

Man soll sich das gleiche Bild unter einer höheren Auflösung *vorstellen*. Die dort vorhandenen *offenen* Gebiete werden dann auf nicht offene Teilkomplexe des vorhandenen Bildes abgebildet. Das sind jetzt "Pseudogebiete", die in die Zellenliste aufgenommen werden sollen. Die Pseudogebiete sind zwar keine offenen zusammenhängenden Teilkomplexe, aber Bilder von solchen. Aus diesem Grunde dürfen sie als Blöcke aufgefaßt werden. Das Erkennen der offenen Gebiete, die im vorhandenen Bild nicht zu sehen sind, kann auf Grund der a-priopi-Information über das Bild durch eine Auswertung der oben erwähnten Folge von Pixeln und ihrer Umgebung realisiert werden. So z.B., wenn man weiß, daß das Bild eine technische Zeichnung darstellt, dann sind dort dünne schwarze Linien auf weißem Hintergrund mit großer Wahrscheinlichkeit vorhanden. Dann kann eine Folge von schwarzen Pixeln als ein schmales Gebiet behandelt werden.

2.3 Theoretische Aspekte der automatischen Erzeugung von 2D-Zellenlisten

Wir beschreiben hier den *universellen* Algorithmus zum Erzeugen einer zweidimensionalen geometrischen Zellenliste für ein segmentiertes Rasterbild. "Universell" bedeutet, daß dieser Algorithmus für Bilder mit sowohl einfach als auch nicht einfach zusammenhängenden Gebieten (s. dazu den vorigen Abschnitt) geeignet ist. Um den Algorithmus zu beschreiben, brauchen wir erst einmal den Begriff einer Begrenzungskomponente. In einem Bild mit nicht einfach zusammenhängenden Gebieten kann die Begrenzung eines Gebietes aus mehreren Komponenten bestehen: Jedes Loch im Gebiet G hat seine eigene Komponente, die mit der *äußeren* Begrenzung von G nicht zusammenhängend ist. Das Loch selbst kann in mehrere einfach zusammenhängende Teilgebiete unterteilt werden, so daß *jedes* Teilgebiet einfach zusammenhängend ist. Dann bilden die Begrenzungen dieser Teilgebiete einen zusammenhängenden eindimensionalen Komplex. Diesen bezeichnen wir als eine *Begrenzungskomponente*. So z.B. hat das Bild in Abb. 4 zwei Begrenzungskomponenten.

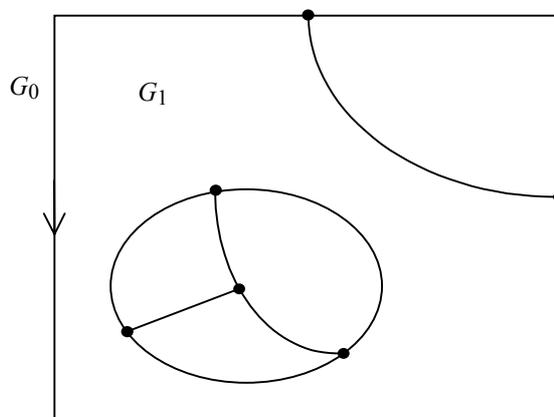


Abb. 4. Beispiel eines segmentiertes Bildes (Erläuterung im Text)

Die Idee des Algorithmus besteht im folgenden:

Als Gebiet bezeichnen wir eine zusammenhängende Menge von Pixeln mit einem konstanten Wert (Farbe, Grauwert, Merkmal usw.). Für eine genaue Definition des Zusammenhangs in digitalisierten Bildern soll hier auf Anlage 1 oder auf (Kov 89) verwiesen werden.

Man durchsucht das Bild Zeile für Zeile, bis man ein Paar von in der Zeile benachbarten Pixel mit verschiedenen Werten gefunden hat. (Solch ein Paar kann auch am linken Bildrand liegen, falls z. B. der Wert von G_1 in Abb. 4 ungleich dem implizit definierten Wert von G_0 ist). An einer solchen Stelle wird die Subroutine SC zur Bearbeitung einer Begrenzungskomponente (BK) gestartet. Diese verfolgt die äußere Begrenzung des gefundenen Gebietes (im Falle von G_1 wäre dies der Bildrand) und codiert dabei den Verlauf der Linie (z.B. mit einem Crack-Code) bis zum ersten Verzweigungspunkt (VP) und hält dort an. Faßt man das Bild als einen ACC auf, ist der Verfolgungsalgorithmus besonders einfach: Er besteht im Wesentlichen aus zwei "IF"-Befehlen (Kov 92). Die Verfolgung ist so orientiert, daß ein vorgegebener Wert der Pixel immer rechts von der Verfolgungsrichtung bleibt. Im Falle der Abb. 4 wäre dies beim ersten Start von SC der Wert von G_0 . Dadurch bekommen die Linien eine bestimmte Orientierung.

Falls kein VP gefunden wurde, besteht die gefundene BK aus einer einzigen geschlossenen Linie. Diese wird in die Zellenliste eingetragen. Der Startpunkt und der Endpunkt dieser Linien sind gleich. Der Index des äußeren Gebietes ist am Anfang als 1 vorgegeben. Bei weiteren BK's wird er mit einer dafür bestimmten Subroutine ermittelt. Das innere Gebiet ist ein neu entdecktes Gebiet; es bekommt den nächsten nicht benutzten Index und wird in die Zellenliste eingetragen. In diesem Fall (Begrenzung ohne VP) ist die Bearbeitung einer BK abgeschlossen.

Wenn ein VP gefunden wurde, wird der ermittelte Teil der Begrenzung vom Startpunkt bis zum ersten VP verworfen. Der VP wird in die Zellenliste eingetragen und auch als Haltepunkt für die Verfolgung der äußeren Begrenzung vermerkt. Dabei wird aus der Umgebung des VP's ermittelt, in welchen Richtungen Linien vorhanden sind (im rechtwinkligen Raster können es höchstens vier sein). Diese Richtungen werden im Eintrag des VP's in die Zellenliste als Platzhalter für weitere Linien markiert. Die Verfolgung der äußeren Begrenzung geht weiter. Die entsprechende Linie L_i wird sofort in die Zellenliste eingetragen, erst einmal ohne Endpunkt. Das Gebiet auf der anderen (inneren) Seite der Linie wird auch eingetragen: L_i wird als seine Startlinie eingetragen, der Wert aus einem mit dem VP inzidenten Pixel ermittelt. Die Verfolgung hält beim nächsten VP (man kann beweisen, daß es niemals genau einen VP geben kann). Dieser wird in die Zellenliste eingetragen usw. bis man den Haltepunkt erreicht hat. Dann werden die VP's aus der Zellenliste einer nach dem anderen gelesen und die Linien, die dort durch Platzhalter vertreten sind, eine nach der anderen verfolgt und eingetragen. Beim Eintragen einer Linie wird selbstverständlich ihr Platzhalter durch den Index dieser Linie ersetzt. Bei der Verfolgung können neue VP's gefunden und

eingetragen werden. Dieser Prozeß endet, wenn keine Platzhalter mehr da sind. Damit ist die Verarbeitung einer BK beendet. Falls die Zellenliste auch einen Enthaltungsbaum enthalten soll (s. Abschnitt 2.2), wird die BK dort eingetragen.

Dann geht das zeilenweise Suchen der nächsten BK weiter bis das letzte Pixel der letzten Bildzeile erreicht ist. Es ist wichtig zu vermerken, daß für ein fehlerfreies Suchen eine Markierung der bereits verfolgten Linien notwendig ist. Sonst kann eine Linie mehrfach gefunden werden.

Eine topologische Zellenliste kann selbstverständlich aus einer geometrischen erhalten werden, wenn man die metrischen Daten wegläßt. Aber die Zellenlisten, die für den Zweck der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten benötigt werden, haben einige Besonderheiten, die im folgenden Abschnitt beschrieben werden.

2.4 Verfahren zur Untersuchung von 2-Mannigfaltigkeiten

Eines der Ziele dieses Vorhabens ist Entwicklung von computergestützten Verfahren zur Untersuchung topologischer Eigenschaften von 3-Mannigfaltigkeiten. Um die Verfahren zu testen, wurden sie zuerst auf 2-Mannigfaltigkeiten eingesetzt, wo die Ergebnisse von vornherein bekannt sind.

Die Idee des Verfahrens besteht im Folgenden. Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit (n -Mannigfaltigkeit) wird laut unserer Methode als die Begrenzung einer Teilmenge ("Körpers") eines kartesischen $(n+1)$ -dimensionalen ACC dargestellt. (Später haben wir vor, auch andere allgemeinere Darstellungen von Mannigfaltigkeiten zu untersuchen). Die Benutzung der ACC's kann wie folgt begründet werden: Aus der Fachliteratur ist bekannt, daß jede n -Mannigfaltigkeit mit $n=2$ oder 3 trianguliert werden kann (Rin 75). Andererseits kann auch jeder ACC der Dimension 2 oder 3 trianguliert werden. Wir erklären einen ACC A als homöomorph einer Mannigfaltigkeit M , wenn A und M isomorphe Triangulationen besitzen.

Ein $(n+1)$ -dimensionaler "Körper" wird als eine Teilmenge eines $(n+1)$ -dimensionalen Arrays mit topologischen Koordinaten dargestellt. Jedes Element dieses Arrays repräsentiert eine Zelle des ACC's. Es werden Zellen aller Dimensionen dargestellt. Dies kostet zwar viel Speicherplatz, aber dieser Nachteil ist für theoretische Untersuchungen unwichtig. Viel wichtiger ist es, daß dank den topologischen Koordinaten, viele topologische Eigenschaften von Teilmengen des ACC's leicht zu berechnen sind. Dies wird im Weiteren erläutert.

Laut der Idee unserer Methode soll die vorgegebene n -Mannigfaltigkeit M^n in zwei Teilmengen zerlegt werden, wobei eine davon eine möglichst große topologische n -Kugel (d.h. ein Teilkomplex, der zur n -Kugel homöomorph ist) $B^n \subset M^n$, ist. Die zweite Teilmenge ist dann ein $(n-1)$ -dimensionaler Komplex $C^{(n-1)}$. Seine Zellen können in Blöcke zusammengefaßt werden und bilden einen $(n-1)$ -dimensionalen Blockkomplex. Er hat weniger Zellen als M^n und ist von einer niederen Dimension. Deswegen ist es in den meisten Fällen leichter, seine topologischen Eigenschaften zu untersuchen und daraus auf die von M^n

zu schließen. Dies ist möglich auf Grund des Satzes von Seifert und Van Kampen (Seif 31), der besagt, daß die Fundamentalgruppe der Vereinigung M von zwei Mengen B und C aus den Fundamentalgruppen von B und C konstruiert werden kann, indem man solche zusätzliche Relationen einführt, daß jede davon die Generatoren der Fundamentalgruppe von $B \cap C$ durch die Generatoren der Fundamentalgruppen von B und C ausdrückt.

In unseren Fall ist B die n -Kugel, deren Fundamentalgruppe trivial ist. Die Eigenschaften von C (einem $(n-1)$ -dimensionalen Blockkomplex) sind zu untersuchen und $B \cap C$ die Begrenzung der n -Kugel, also eine $(n-1)$ -Sphäre ist, die auch (bei $n=2$ und 3) eine einfache Struktur hat.

Es sei vermerkt, daß unsere Methode *nicht* auf der Untersuchung der Fundamentalgruppen basiert. Diese wurden hier nur herangezogen, um die Zerlegung der Mannigfaltigkeit in eine n -Kugel und einen $(n-1)$ -dimensionalen Blockkomplex zu begründen.

Wir wiederholen hier die Abb. 3a in Abb. 5. Sie illustriert die Idee der Zerlegung einer einfachen 2-Mannigfaltigkeit:

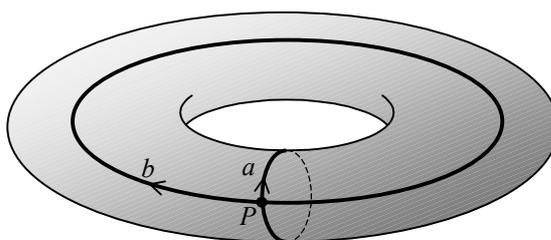


Abb. 5. Zerlegung der Oberfläche eines Torus

Die Oberfläche des Torus ist eine 2-Mannigfaltigkeit M^2 . Die größte offene topologische 2-Kugel in M^2 ist ein offenes Rechteck, das entsteht, wenn man die Oberfläche des Torus an den in Abb. 5 gezeigten Kurven zerschneidet. Die zwei Kurven a und b mit dem Punkt P bilden einen einfachen 1-dimensionalen Blockkomplex aus nur drei Blockzellen, wobei jede der Kurven (ohne Punkt) eine eindimensionale Blockzelle ist. Die ganze Mannigfaltigkeit M^2 ist dann ein zweidimensionaler Blockkomplex, wobei das Rechteck die einzige zweidimensionale Blockzelle ist.

Laut unser Methode wird der Blockkomplex $B^n \cup C^{(n-1)}$ als eine Zellenliste codiert. Wie bereits erwähnt, ist die Zellenliste redundant. Die notwendige topologische Information ist in der Teilliste der Gebiete enthalten. Diese beschreibt die Begrenzung der (in diesem Fall einzigen) 2-Zelle B^n mit $n=2$. Diese Begrenzung ist, wie weiter oben erläutert, eine geschlossene Folge:

$$a, P, b, P, a', P, b', P, a; \quad (2)$$

die man bekommt, wenn man die Begrenzung des offenen Rechtecks verfolgt. Dabei bezeichnet das Symbol a eine Bewegung entlang der *orientierten* kürzeren Kurve entlang

ihrer linken Seite bezeichnet und das Symbol b eine ähnliche Bewegung entgegen der längeren Kurve. Die Symbole a' und b' bezeichnen Bewegungen *gegen* die angenommene Orientierung dieser Kurven.

Weil der Punkt P sich ständig wiederholt, trägt er keine zusätzliche Information und kann weggelassen werden. So kommt man zu der symbolischen Form:

$$a, b, a', b'. \quad (3)$$

Der Ausdruck (3) ist in der topologischen Fachliteratur als *Oberflächensymbol* bekannt.

Bei 2-Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht größer als 1 (Geschlecht einer 2-Mannigfaltigkeit ist die Anzahl der Tunnel oder Henkel) entsteht nach unserem Verfahren manchmal ein Blockkomplex mit mehr als einem Punkt. Die entsprechende Zellenliste muß und kann auf einen Blockkomplex mit einem *einzigem Punkt* reduziert werden. Das entsprechende Verfahren wurde von uns entwickelt und erfolgreich getestet. Es wird durch eine entsprechende Verarbeitung der Zellenliste realisiert. Die Beschreibung dieses Verfahrens würde den Umfang dieses Schreibens zu groß machen. Sie wird in einer späteren Publikation gebracht.

Nach der Reduktion der Zellenliste entsteht meistens eine sogenannte Normalform des Oberflächensymbols. Der Ausdruck (3) ist ein Beispiel dafür. Verfahren zum Umwandeln eines beliebigen Oberflächensymbols in die Normalform sind bekannt (Rin 75, S. 546ff).

Es wurden mehrere Computerexperimente durchgeführt, die es bestätigt haben, daß unser Verfahren für orientierbare 2-Mannigfaltigkeiten ohne Rand eine richtige topologische Auswertung realisiert und eine *Normalform automatisch* erzeugt.

3 Dreidimensionale Zellenliste

In diesem Abschnitt werden Datenstrukturen und Verfahren zur Untersuchung von 3-Mannigfaltigkeiten beschrieben.

3.1 Theorie der topologischen dreidimensionalen Zellenliste

Eine dreidimensionale Zellenliste beschreibt die topologische Struktur eines dreidimensionalen Blockkomplexes. Sie besteht, ähnlich wie die zweidimensionale Zellenliste, aus Teillisten der k -Blöcke mit $k=0, 1, 2$ und 3 .

Das Besondere dabei sind andere, kompliziertere Inzidenzstrukturen der Blöcke. Die kleinste offene Umgebung $SON(P, M^3)$ (s. Anlage 1 oder Kov 89) eines Punktes P in einer 3-Mannigfaltigkeit M^3 enthält Zellen der Dimensionen 0 bis 3.

Wir betrachten im Weiteren nur den topologischen Raum von M^3 und nicht den höherdimensionalen Raum, in den M^3 eingebettet ist; dementsprechend benutzen wir die kürzere Schreibweise $\text{SON}(P)$ anstelle von $\text{SON}(P, M^3)$.

Laut Definition einer Mannigfaltigkeit ist $\text{SON}(P)$ einer offenen 3-Kugel homöomorph. Die Menge $\text{SON}(P) - \{P\}$ bezeichnen wir im Weiteren mit $\text{SON}^*(P)$. Diese Menge ist einer hohlen offenen 3-Kugel homöomorph. Weil $\text{SON}(P)$ die *kleinste* Umgebung ist, ist $\text{SON}^*(P)$ einer 2-Sphäre B-isomorph. Dies bedeutet, daß $\text{SON}^*(P)$ auf eine 2-Sphäre und damit auch auf die Ebene ohne Informationsverlust abgebildet werden kann. So z.B. besteht die $\text{SON}(P)$ in einem *kartesischen* dreidimensionalen ACC aus 8 Würfeln, 12 viereckigen Flächen, 6 Strecken und dem Punkt P selbst. Die $\text{SON}^*(P)$ kann für diesen Spezialfall auf die Oberfläche eines Oktaeders abgebildet werden (Abb. 6). Dabei werden die 8 Würfel auf die Flächen, die 12 viereckigen Trennflächen auf die Kanten und die 6 Strecken auf die Eckpunkte abgebildet. Die Oberfläche des Oktaeders kann planar dargestellt werden (s. weiter unten Abb. 7).

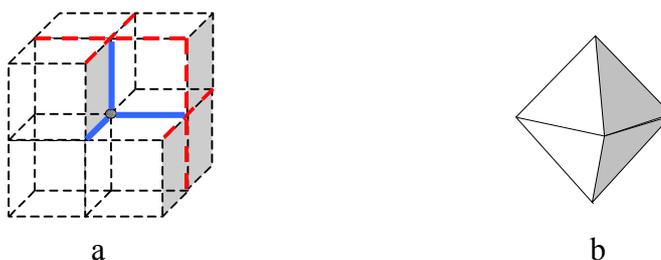


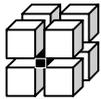
Abb. 6. Die SON eines Punktes (a) und ein Oktaeder (b)
(eine 3-Zelle wurde herausgenommen, um das Innere sichtbar zu machen)

Die kleinste offene Umgebung eines 0-Blocks in dem Blockkomplex, der eine 3-Mannigfaltigkeit darstellt, ist auch einer 3-Kugel homöomorph. Ihre Inzidenzstruktur entspricht ihrer SON^* und kann auch auf die Oberfläche eines Polyeders, die einer 2-Sphäre homöomorph ist, ohne Informationsverlust abgebildet werden.

Ähnliches gilt auch für Blöcke anderer Dimensionen: Die Inzidenzstruktur eines Blocks ist immer einer 2-Sphäre B-isomorph. Diese Aussage kann folgendermaßen präzisiert werden: Man betrachte außer die SON den Abschluß (abgeschlossene Hülle) $\text{Cl}(Z^k)$ einer k -dimensionalen Zelle (bzw. Blockzelle) Z^k und die Menge $\text{Cl}^*(Z^k) = \text{Cl}(Z^k) - \{Z^k\}$. Die Inzidenzstruktur ist offensichtlich die Vereinigung $\text{Cl}(Z^k) \cup \text{SON}^*(Z^k)$. Wir haben bewiesen, daß in einer 3-Mannigfaltigkeit diese Menge immer einer 2-Sphäre B-isomorph ist. Für einen kartesischen dreidimensionalen ACC A^3 ist diese Tatsache mit der Tabelle 8 illustriert:

Tabelle 8

Inzidenzstrukturen von Zellen verschiedener Dimensionen
in einem kartesischen dreidimensionalen ACC A^3

Dimension k	$CI^*(Z^k, A^3)$		$SON^*(Z^k, A^3)$		$CI^* \cup SON^*$ min. Sphäre
	Komplex	min. Sphäre	Komplex	min. Sphäre	
1	2	3	4	5	6
0	\emptyset	\emptyset	dim=3 	dim=2 	dim=2 
1	dim=0 	dim=0 	dim=3 	dim=1 	dim=2 
2	dim=1 	dim=1 	dim=3 	dim=0 	dim=2 
3	dim=2 	dim=2 	\emptyset	\emptyset	dim=2 

In der Spalte 1 steht die Dimension der jeweiligen Zelle Z^k aus einer 3-Mannigfaltigkeit. In den Spalten 2 bzw. 4 sind jeweils die Dimension und eine schematische Zeichnung von $CI^*(Z^k)$ bzw. $SON^*(Z^k)$ dargestellt; in den Spalten 3 bzw. 5 bzw. 6 – die Dimension und eine schematische Zeichnung des zu $CI^*(Z^k)$ bzw. $SON^*(Z^k)$ bzw. $CI^*(Z^k) \cup SON^*(Z^k)$ B-isomorphen Komplexes mit der kleinsten Dimension. In den Zeichnungen ist die k -dimensionale Zelle Z^k , die *nicht* zu der jeweiligen Struktur $CI^*(Z^k)$ bzw. $SON^*(Z^k)$ gehört, mit roter Farbe dargestellt.

Wie man sieht, ist es im Falle der Inzidenzstruktur (Spalte 6) immer eine 2-Sphäre. Man kann beweisen, daß dies auch für nicht kartesische ACC's so ist.

Wie gezeigt, kann die Inzidenzstruktur jeder Blockzelle eines dreidimensionalen Blockkomplexes auf eine 2-Sphäre ohne Informationsverlust projiziert werden und als die Oberfläche eines Polyeders beschrieben werden, wobei diese einer 2-Sphäre homöomorph ist. Dies bedeutet, daß die Inzidenzstruktur immer mit einer zweidimensionalen topologischen Zellenliste beschrieben werden kann, die eine topologische 2-Sphäre darstellt.

Wie man aus Tabelle 8 sieht, sind in der Inzidenzstruktur von 1- und 2-Zellen jeweils zwei Elemente ausgezeichnet: Bei einer 1-Zelle sind dies ihre zwei Endpunkte; bei einer 2-Zelle sind es die zwei von ihr berandeten 3-Zellen. In einer 3-Mannigfaltigkeit sind es in beiden Fällen immer *genau zwei ausgezeichnete Elemente*. Dadurch kann die Beschreibung der

Inzidenzstruktur noch weiter vereinfacht werden: Man soll die zwei ausgezeichneten Elemente und eine zyklische Folge der restlichen Elemente angeben. Bei den 0- und 3-Zellen ist die Anzahl der Elemente jeder Dimension unbestimmt. In diesen Fällen soll man die Inzidenzstruktur mit der allgemeinen zweidimensionalen Zellenliste beschreiben.

Wie man weiß, ist die Zellenliste redundant: Bei einer topologischen Zellenliste genügt es eine beliebige Teilliste anzugeben. Wir wählen die Teilliste der Gebiete. Dort soll für jedes Gebiet eine orientierte zyklische Folge von abwechselnden 0- und 1-Zellen angegeben werden. Man darf dabei nicht vergessen, daß im Falle einer 0-Zelle die 2-Sphäre bloß ein B-isomorphes Bild der SON^* ist. Dies bedeutet, daß die k -Zellen der zweidimensionalen Zellenliste die $(k+1)$ -Zellen des 3D-Raumes repräsentieren. Abb. 7 zeigt ein Beispiel der Darstellung der Inzidenzstruktur eines Punktes (eines 0-Blocks) in einem dreidimensionalen kartesischen ACC:

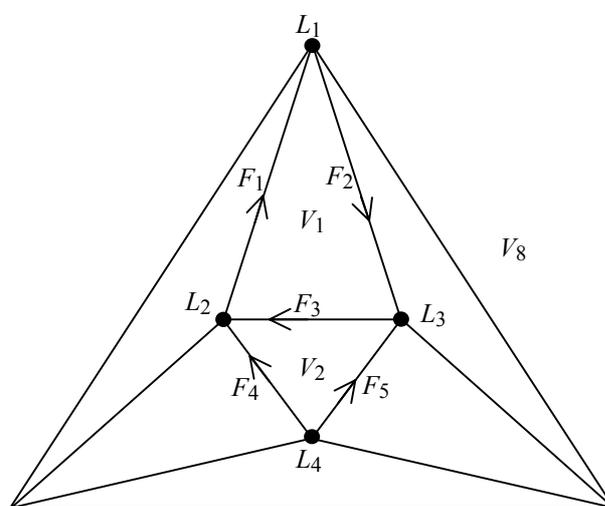


Abb. 7. Abbildung der SON^* eines Punktes aus einem 3D ACC auf die Ebene

Die Darstellung von Abb. 7 ist eine isomorphe Abbildung der Oberfläche eines Oktaeders: Dreiecke entsprechen Dreiecken usw. Dabei soll das äußere Gebiet auch als eine dreieckige Fläche betrachtet werden. Die Dreiecke repräsentieren die 3-Zellen des ACC's, die Kanten – die 2-Zellen und die Knoten – die 1-Zellen. Hier sind nur einige Zellen mit Indizes versehen, um das Bild nicht zu verdunkeln. Auf diese Indizes und auf die Orientierung wird später, im Beispiel einer dreidimensionalen Zellenliste, Bezug genommen.

Das Bild sieht aus wie ein planarer Graph. Aber im letzteren fehlen die Flächen. Für eine vollständige Darstellung muß bekanntlich jedem Knoten des Graphen die sogenannte Zirkulation hinzugefügt werden. Dies würde der Teilliste der Verzweigungspunkte einer zweidimensionalen Zellenliste entsprechen. Man kann auch einen planaren Graph *mit Flächen* definieren, indem man die Folge der Knoten und Kanten in der Begrenzung jeder Fläche angibt. Dies entspricht der Teilliste der Gebiete einer zweidimensionalen Zellenliste. Wir haben diese Darstellung für die SON^* eines Punktes in der dreidimensionalen Zellenliste gewählt. Man soll hier noch einmal betonen, daß die Gebiete der zweidimensionalen Zellenliste von Abb. 7 den Körpern des 3D-Raumes entsprechen.

Es ist wichtig zu bemerken, daß die obige Beschreibung der Struktur der dreidimensionalen Zellenliste für 3-Mannigfaltigkeiten *ohne Rand* gilt. Bei Mannigfaltigkeiten mit Rand sind die Umgebungen der Randzellen kleiner: Die Umgebung eines Punktes muß einer n -dimensionalen *Halbkugel* homöomorph sein, in der Umgebung einer Linie kann die Folge der 2- und 3-Zellen nicht geschlossen sein. Aber diese Strukturen sind ja Teilmengen der oben beschriebenen und passen immer in diese Strukturen hinein.

3.2 Struktur der topologischen dreidimensionalen Zellenliste

Jetzt wird bereit, die Struktur einer dreidimensionalen topologischen Zellenliste am Beispiel einer einfachen 3-Mannigfaltigkeit mit Rand (Abb. 8) vorzustellen. Der entsprechende Blockkomplex enthält zwei Verzweigungspunkte P_1 und P_2 ; zwei Linien L_1 und L_2 ; drei Flächen F_1, F_2 und F_3 ; und zwei Körper (Würfel) V_1 und V_2 . Die Fläche F_2 trennt die Würfel voneinander, F_1 und F_3 sind jeweils die restlichen Flächen der Würfel.

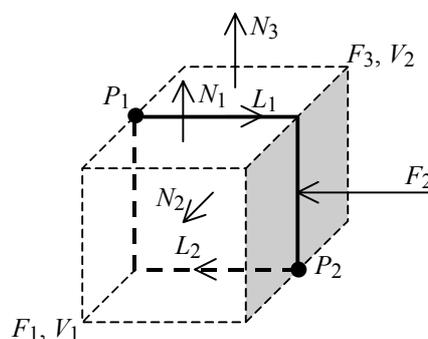


Abb. 8. Beispiel einer 3-Mannigfaltigkeit mit Rand

Die planare Darstellung der Umgebung des Punktes P_1 bzw. P_2 ist in Abb. 9a bzw. 9b gezeigt:

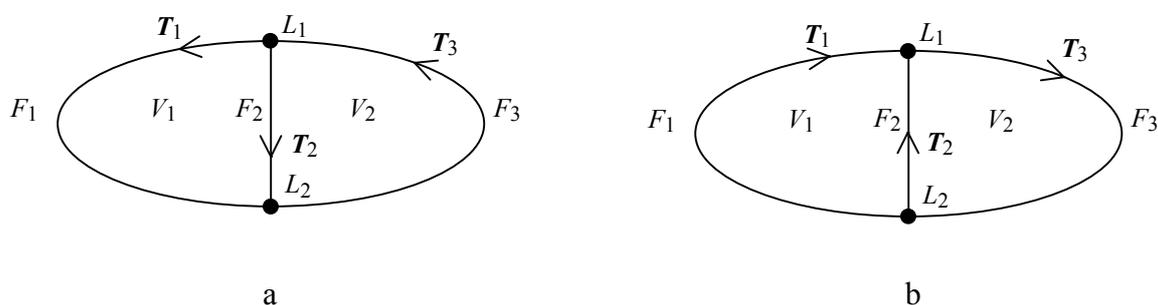


Abb. 9. B-isomorphe planare Darstellung der Umgebungen der Punkte P_1 (a) und P_2 (b) aus Abb. 9

Dabei wird die Orientierung T der Linien in der planaren Darstellungen nach der Regel der rechten Schraube bestimmt: $T = \overline{(P, F)} \times N_F$. Hier ist $\overline{(P, F)}$ der 3D-Vektor vom Punkt P zu

irgendeinem inneren Punkt der Fläche F und N_F – die Normale zur Fläche F . Weil der Vektor (P_1, F_2) dem Vektor (P_2, F_2) entgegengesetzt orientiert ist, sind auch die Linien F_2 in Abb. 9a und Abb. 9b entgegengesetzt orientiert. Die Orientierung der Blöcke läßt sich ähnlich wie bei simplizialen Komplexen, *ohne Benutzung metrischer Daten* bestimmen.

Es folgen die Teillisten der dreidimensionalen Zellenliste:

Tabelle 9: Teilliste der Verzweigungspunkte:

Punkt	N_{vol}	Körper	N_{inz}	Zeiger	Verkettete Liste
P_1	2	V_1	4	$Z_1 \rightarrow$	$L_1 \rightarrow +F_1 \rightarrow L_2 \rightarrow -F_2 \rightarrow L_1$
		V_2	4	$Z_2 \rightarrow$	$L_1 \rightarrow +F_2 \rightarrow L_2 \rightarrow +F_3 \rightarrow L_1$
P_2	2	V_1	4	$Z_3 \rightarrow$	$L_1 \rightarrow +F_1 \rightarrow L_2 \rightarrow -F_2 \rightarrow L_1$
		V_2	4	$Z_4 \rightarrow$	$L_1 \rightarrow +F_2 \rightarrow L_2 \rightarrow +F_3 \rightarrow L_1$

Hier bedeutet N_{vol} die Anzahl der mit dem jeweiligen Punkt P_i inzidenten Körper (3-Blöcke) und N_{inz} die Anzahl der mit dem jeweiligen V_i inzidenten Zellen. Wenn der Blockkomplex mehrere Punkte hat, wird jeder Punkt in einer Gruppe von N_{vol} Zeilen der Tabelle beschrieben.

Das Vorzeichen vor dem Index F_j einer orientierten 2-Zelle gibt die Orientierung dieser Zelle relativ zum jeweiligen Körper V_i an: Plus bedeutet, daß die Normale zur 2-Zelle vom Körper nach außen zeigt.

In der Teilliste der Verzweigungslinien (alle 1-Blöcke sind Verzweigungslinien) werden für jede Linie ihr Start- und Endpunkt angegeben und außerdem die zyklische Folge der mit ihr inzidenten Flächen und Körper.

Tabelle 10: Teilliste der Verzweigungslinien:

Linie	Start	Ende	N_{inz}	Zeiger	Verkettete Liste
L_1	P_1	P_2	5	$Z_5 \rightarrow$	$F_1 \rightarrow V_1 \rightarrow F_2 \rightarrow V_2 \rightarrow F_3 \rightarrow 0$
L_2	P_2	P_1	5	$Z_6 \rightarrow$	$F_1 \rightarrow V_1 \rightarrow F_2 \rightarrow V_2 \rightarrow F_3 \rightarrow \rightarrow 0$
...

wobei N_{inz} die Anzahl der mit der jeweiligen Linie inzidenten Blöcke ist. Diese Teilliste zeigt in jeder Zeile die Inzidenzstruktur einer Linie. Die Reihenfolge in der verketteten Liste wird

so gewählt, daß die Drehung um die jeweilige Linie eine Bewegung entlang der orientierten Linie nach der Regel der rechten Schraube ergibt. Eine 0 am Ende der verketteten Liste bedeutet, daß die Folge nicht geschlossen ist, was nur bei Mannigfaltigkeiten mit Rand vorkommt.

Die Teilliste der Flächen (2-Blöcke) sieht der Teilliste der Verzweigungslinien ähnlich: Sie enthält wieder zwei "gesonderte" mit ihr inzidente Blöcke (dies sind jetzt 3-Blöcke) und eine zyklische Folge in einer verketteten Liste:

Tabelle 11: Teilliste der Flächen:

Fläche	+Vol	-Vol	N_{inz}	Zeiger	Verkettete Liste
F_1	-	V_1	4	$Z_7 \rightarrow$	$P_1 \rightarrow -L_2 \rightarrow P_2 \rightarrow -L_1 \rightarrow P_1$
F_2	V_1	V_2	4	$Z_8 \rightarrow$	$P_1 \rightarrow -L_2 \rightarrow P_2 \rightarrow -L_1 \rightarrow P_1$
F_3	-	V_2	4	$Z_9 \rightarrow$	$P_1 \rightarrow +L_1 \rightarrow P_2 \rightarrow +L_2 \rightarrow P_1$

Die verkettete Liste zeigt die geschlossene Folge von Punkten und Linien in der Begrenzung der jeweiligen Fläche. Die Folge und die Vorzeichen bei den Linien sind so gewählt, daß die angegebene Rotation entlang der Begrenzung eine Bewegung nach der rechten Schraube entlang der lokalen Normale ergibt. Im Beispiel von Abb. 8 ist die lokale Normale die Normale zu einer Seite des Würfels, wobei alle lokalen Normalen zueinander kohärent orientiert sein sollen. Im allgemeinen Fall findet man lokale Normalen durch eine Unterteilung der Fläche in kleinere Flächen.

Tabelle 12: Teilliste der Körper (3-Blöcke):

Körper	N_{Fl}	Fläche	N_{inz}	Zeiger	Verkettete Liste
V_1	2	$+F_1$	4	$Z_{10} \rightarrow$	$P_1 \rightarrow -L_2 \rightarrow P_2 \rightarrow -L_1 \rightarrow P_1$
		$-F_2$	4	$Z_{11} \rightarrow$	$P_1 \rightarrow +L_1 \rightarrow P_2 \rightarrow +L_2 \rightarrow P_1$
V_2	2	$+F_2$	4	$Z_{12} \rightarrow$	$P_1 \rightarrow -L_2 \rightarrow P_2 \rightarrow -L_1 \rightarrow P_1$
		$+F_3$	4	$Z_{13} \rightarrow$	$P_1 \rightarrow +L_1 \rightarrow P_2 \rightarrow +L_2 \rightarrow P_1$

wobei N_{Fl} die Anzahl der mit V_i inzidenten Flächen (2-Blöcke) und N_{inz} die Anzahl der mit der jeweiligen Fläche F_j inzidenten Zellen angibt.

3.3 Erzeugung der Zellenliste einer 3-Mannigfaltigkeit

Die Zellenliste einer 3-Mannigfaltigkeit wird nach der gleichen Methode, wie im Falle einer 2-Mannigfaltigkeit erzeugt: Es wird eine immer größer werdende offene 3-Kugel B^n innerhalb von M^3 aufgebaut bis sie nicht mehr vergrößert werden kann. Die Methode ist in der Fachliteratur (z.B. Still 97) als "Shelling" bekannt. Neu ist ihre Realisierung im Computer und die Benutzung der Zellenlisten zur Darstellung der Restmenge $M^n - B^n$. Dieser Vorgang wird wie folgt realisiert:

Aus der Fachliteratur ist der Begriff einer einfachen Zelle bekannt: In einem n -dimensionalen Raum heißt eine n -Zelle Z^n *einfach* relativ zu einem n -dimensionalen Teilkomplex K^n genau dann, wenn der Durchschnitt D der Begrenzungen von Z^n und K^n einer $(n-1)$ -Kugel homöomorph ist. Dieser Begriff ist für unser Vorhaben wichtig, weil mit seiner Hilfe das algorithmische Aufbauen einer immer größeren n -Kugel innerhalb einer n -Mannigfaltigkeit ermöglicht wird. Dies basiert auf der Tatsache, daß die Vereinigung einer topologischen n -Kugel B^n mit einer n -Zelle Z^n und mit dem Durchschnitt D genau dann wieder eine n -Kugel ist, wenn Z^n einfach relativ zu B^n ist.

Um diese Idee in einen Algorithmus umzusetzen, der auf einen dreidimensionalen ACC A anwendbar ist, braucht man einen Test, der über einen Teilkomplex von A aussagt, ob dieser eine topologische 2-Kugel ist. Ein ähnlicher Test für zweidimensionale ACC's ist sehr einfach: Der oben erwähnte Durchschnitt D soll mindestens eine 1-Zelle enthalten und zusammenhängend sein. Dann ist D eine 1-Kugel. Im dreidimensionalen Fall ist der Test komplizierter. Den Test und den Algorithmus haben wir im Laufe dieses Vorhabens entwickelt. Der Test basiert auf dem folgenden Satz E.

Es sei B die Begrenzung eines vierdimensionalen Teilkomplexes V eines vierdimensionalen ACC's A , wobei B unverzweigt ist (Rin 75). T sei ein in B offener homogener dreidimensionaler Teilkomplex von B , $\text{Fr}(T)$ seine Begrenzung relativ zu B und $Z \in B$ eine 3-Zelle. Die zu B relative Begrenzung $\text{Cl}^*(Z, B)$ von Z wird mit K bezeichnet.

Satz E: Die Zelle Z ist genau dann *einfach relativ zu T* , wenn der Durchschnitt $D = K \cap \text{Fr}(T)$ und das Komplement $K - D$ zweidimensionale stark zusammenhängende Komplexe sind, wobei D im Randkomplex von T enthalten ist.

Für eine algorithmische Umsetzung bedeutet dies Folgendes: Die Zugehörigkeit von D zum Randkomplex von T braucht nicht geprüft zu werden, wenn vorher geprüft wurde, daß B eine 3-Mannigfaltigkeit ist. Dieser Test wurde im Laufe dieses Projekts algorithmisch realisiert.

Alle Zellen von T , unabhängig von ihrer Dimension, werden markiert. Mit Hilfe der topologischen Koordinaten werden alle Zellen von $K = \text{Cl}^*(Z, B)$ gefunden. Diejenigen, die zu D gehören, werden daran erkannt, daß sie markierte Zellen von T beranden. Es wird geprüft:

- a) Ob in D *mindestens eine* 2-Zelle enthalten ist;
- b) Ob in D *keine* solche 1-Zelle enthalten ist, die keine in D enthaltene 2-Zelle berandet;
- c) Ob D und $K - D$ *stark zusammenhängend* sind.

Es wurde bewiesen, daß dieser Test ausreichend ist. Für eine ausführliche Beschreibung und für die Beweise fehlt hier der Platz.

Bei der algorithmischen Realisierung wird eine beliebige 3-Zelle aus M^3 als die Keimzelle des Teilkomplexes T deklariert und markiert. Dann wird der Raum immer wieder nach 3-Zellen Z^3 durchsucht, die relativ zu T einfach sind. Diese Zellen und die Zellen des entsprechenden Durchschnitts D werden markiert und dadurch mit T vereinigt. So entsteht eine immer größer werdende 3-Kugel. Wenn es keine einfachen Zellen mehr gibt, ist T die gesuchte maximale 3-Kugel B^3 .

Diese Kugel B^3 bildet dann den einzigen 3-Block des aufzubauenden Blockkomplexes. Der Rest $M^3 - B^3$ enthält keine 3-Zellen mehr und bildet einen zweidimensionalen Komplex C^2 . Dann werden die Zellen von C^2 nach der Art ihrer Umgebungen in C^2 , wie in (Casl 65), klassifiziert:

- a) Wenn die Umgebung einer Kreisscheibe B^2 homöomorph ist, gehört die Zelle zu einem 2-Block;
- b) Wenn die Umgebung einer Vereinigung von drei oder vier Halbkreisscheiben mit einem gemeinsamen Durchmesser homöomorph ist, gehört die Zelle zu einem 1-Block;
- c) Sonst ist es ein 0-Block.

Jede zusammenhängende Teilmenge einer dieser Klassen ist ein Block. Jeder Block bekommt eine Marke und alle Zellen dieses Blocks bekommen diese Marke. Wenn man die Begrenzung eines 2-Blocks relativ zu C^2 verfolgt und die dabei auftretenden Marken von 0- und 1-Blöcken erfaßt, bekommt man für jeden 2-Block die verkettete Liste seiner Begrenzung, wie sie in Tabelle 11 angegeben ist.

Die dreidimensionale Zellenliste ist, wie auch die zweidimensionale, redundant: Es genügt, eine der Teillisten zu untersuchen, z.B. die der 3-Blöcke. Da im Falle einer 3-Mannigfaltigkeit nur ein einziger 3-Block B^3 vorhanden ist, reduziert sich die Zellenliste auf die Teilliste der Flächen. Weil nur ein Körper (3-Block) da ist, brauchen die Körper (Spalten 2 und 3 der Tabelle 11) nicht angegeben werden. Es bleiben die verketteten Listen der Begrenzungen aller 2-Blöcke.

Im Falle von Mannigfaltigkeiten der Komplexität 1 nach (Mat 89) hat der Blockkomplex einen einzigen 0-Block. Dann kann die reduzierte Zellenliste noch weiter vereinfacht werden, indem man in der Folge (Punkt – Linie – Punkt ...) nur die Linien läßt.

Ähnlich wie im 2D-Fall, wo die 1-Blöcke des eindimensionalen "Restkomplexes" sich auf eine eindimensionale Sphäre, d.h. auf eine Kreislinie, eindeutig projizieren ließen, lassen sich die 2-Blöcke der Begrenzung von B^3 auf eine 2-Sphäre eindeutig projizieren. Somit bekommt in der Projektion jede Linie (1-Block) *genau zwei* inzidente Gebiete (2-Blöcke). Dies bedeutet, daß bei der Beschreibung der Begrenzung eines bestimmten Gebietes kann jede Linie der Begrenzung durch das andere mit dieser Linie inzidente Gebiet ersetzt werden. D.h. anstatt einen 1-Block L in der Begrenzung des 2-Blocks F_i anzugeben, kann man den zweiten mit L inzidenten 2-Block F_j angeben. So entsteht für jeden 2-Block eine Folge von Indizes der

Darstellung der Oberfläche eines Oktaeders: Seine Seiten repräsentieren die 3-Blöcke, die Kanten – die 2-Blöcke und die Eckpunkte – die 1-Blöcke.

Wenn man die Begrenzung eines 2-Blocks verfolgt und dabei die 1-Blöcke durch benachbarte andere 2-Blöcke, wie weiter oben beschrieben, ersetzt, bekommt man Folgen von Symbolen der 2-Blöcke. So z.B. bekommt die Fläche a' in Abb. 10 die Folge (im Uhrzeigersinn) b,c,b',c' ; die Fläche $b \rightarrow a,c,a',c'$ und die Fläche $c \rightarrow a,b',a',b = b,a,b',a'$. Das sind die von uns vorgeschlagenen Normalformen einer 3-Mannigfaltigkeit. Die Folge für eine Fläche mit einem Symbol mit Strich, wie a' , b' und c' hat immer eine entgegengesetzte Reihenfolge im Vergleich zu dem gleichen Symbol ohne Strich. Also hat a die Folge $a \rightarrow b,c',b',c$. Die vollständige verallgemeinerte Normalform des verklebten Würfels ist:

$$\text{Zyklus}(a) = (b,c,b',c');$$

$$\text{Zyklus}(b) = (a,c,a',c');$$

$$\text{Zyklus}(c) = (b,a,b',a').$$

Die verallgemeinerte Normalform ist ein *neues Mittel* zur Beschreibung topologischen Eigenschaften von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.

3.4 Experimentelle Ergebnisse.

Als erste Anwendung dieser Methode wurde ein Verfahren zur *sparsamen Codierung von Oberflächen* entwickelt und erfolgreich getestet. Die Ergebnisse wurden auf der Topologie-Tagung in Paris vorgetragen und publiziert (Kov 99a).

Die Methode wurde zuerst zur automatischen Auswertung der bekannten topologischen Eigenschaften von 2-Mannigfaltigkeiten eingesetzt. Es wurde in einem Computerprogramm realisiert und erfolgreich getestet (s. Abschnitt 2.4). Danach wurde ein zweites Programm für den 3D-Fall entwickelt. Dieses Programm erzeugt automatisch eine formalisierte Beschreibung der vorgegebenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit in Form einer dreidimensionalen topologischen Zellenliste. Aus dieser wird dann die verallgemeinerte Normalform berechnet.

Einige einfachen Typen der 3-Mannigfaltigkeiten wurden bereits richtig erkannt. Im Weiteren sollen verschiedene Mannigfaltigkeiten mit der neuen Methode bearbeitet werden. Es soll auch untersucht werden, für welche 3-Mannigfaltigkeit die verallgemeinerte Normalform existiert. Dann soll man evtl. nach einer weiteren Verallgemeinerung für andere Fälle suchen.

4 Schlußfolgerung

Die theoretisch begründete *neue Methode* der Untersuchung topologischer Eigenschaften von zwei- und dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten ist vielversprechend, weil sie auf dem Computer implementiert ist. Eine formalisierte Beschreibung der topologischen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten mit der entwickelten *verallgemeinerten Normalform* kann automatisch erzeugt werden. Bei der Weiterführung der Untersuchungen ist ein Beitrag zur Lösung des bis jetzt nicht gelösten Problems der Klassifizierung dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten zu erwarten.

In der Fortsetzung dieser Arbeit soll außerdem die neu entwickelte Struktur einer dreidimensionalen topologischen Zellenliste durch das Hinzufügen metrischer Daten zu einer *geometrischen* Zellenliste weiterentwickelt und experimentell getestet werden. Die Lösung dieses Problems verspricht neue Möglichkeiten einer effizienten Speicherung und Verarbeitung sowohl von dreidimensionalen Bildern, z.B. aus der Computertomographie, als auch von Bildfolgen im digitalen Fernsehen.

5 Zitierte Literatur

- (Der Name von Prof. Dr. Wladimir Kovalevski wird in Englisch als "V.A. Kovalevsky" transkribiert)
- (Bing 83) R.H. Bing, "*The Geometric Topology of 3-Manifolds*", American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1983.
- (Casl 65) B.G. Casler, "*An Imbedding Theorem for Connected 3-Manifolds with Boundary*", Proceedings of the American Mathematical Society, **vol 16**, pp. 559-566, 1965.
- (Gor 89) D. Gordon and J.K. Udupa, "*Fast Surface tracking in Three-Dimensional Binary Images*", CVGIP, **Vol. 45**, pp. 196-214, 1989.
- (Ihle 98) T. Ihle, "*3D Umgebungsrekonstruktion durch Segmentierung im spatio-temporalen Kontinuum*", Dissertation, TU Dresden, 1998.
- (Kov 89) V.A. Kovalevsky, "*Finite Topology as Applied to Image Analysis*", Computer Vision, Graphics and Image Processing, **vol. 45**, No. 2, pp. 141-161, 1989
- (Kov 92) V.A. Kovalevsky, "*Finite Topology and Image Analysis*", in "Advances in Electronics and Electron Physics", P. Hawkes ed., Academic Press, **vol. 84**, 1992, pp. 197-259.
- (Kov 94) V.A. Kovalevsky, "*Topological Foundations of Shape analysis*", in "Shape in Picture", Ying-Lie O, Alexander Toet, David Foster, Henk J.A.M. Heijmans, Peter Meer (Eds.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 21-36, 1994.
- (KletKov 99) R. Klette, V. Kovalevsky and Ben Yip. "*On Length Estimation of Digital Curves*", Part of the SPIE Conference on Vision Geometry VIII, Denver/Colorado, July 1999, SPIE **Vol. 3811**, pp. 117-128.

- (Kov 99a) V.A. Kovalevsky, „*A Topological Method of Surface Representation*“, In: Bertrand, G. et al (eds.), "Discrete Geometry für Computer Imagery", Proceedings of the 8th International Workshop, DGCI'99, Springer 1999 , pp. 118-135.
- (Kov 99b) V.A. Kovalevsky, "*Curvature in Digital 2D-Images*", to be published in Theoretical Computer Science, Special Issue on Discrete Geometry, 2000.
- (Matv 97) S.V. Matveev and A.T. Fomenko, "*Algorithmic and computer methods für 3-manifolds*", Kluwer 1997.
- (Matv 89) S. V. Matveev, Additivity of Complexity and the Haken Method in the Topology of Three-Manifolds, *Ukrainsk. Mat. Zhurnal*, **vol. 41:9**, pp. 1234-1239, 1989.
- (Rin 75) W. Rinow, *Lehrbuch der Topologie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft, Berlin 1975
- (Seif 31) H. Seifert, *Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume*, Ber. Sächs. Akad. Wiss. 83 (1931), 26-66.
- (Still 95) John Stillwell, "*Classical Topology and Combinatorial Group Theory*", Springer, 1995.

Anlage 1.

Topologie der abstrakten Komplexe

In diesem Abschnitt möchten wir dem Leser helfen, einige Begriffe aufzufrischen, damit er nicht zu anderen Quellen zu greifen braucht.

Definition 1: Ein *abstrakter Komplex* $C=(E, B, dim)$ (ACC) ist eine Menge E von abstrakten Elementen versehen mit einer antisymmetrischen, irreflexiven und transitiven binären Relation $B \subset E \times E$, genannt *Berandungsrelation*, und mit einer *Dimensionsfunktion* $dim: E \rightarrow I$ von E in die Menge I der nicht negativen ganzen Zahlen, wobei $dim(e') < dim(e'')$ für alle Paare $(e', e'') \in B$.

Elemente von E heißen *abstrakte Zellen*. Es ist wichtig zu betonen, daß abstrakte Zellen *nicht* als Punktmengen eines euklidischen Raums betrachtet werden sollen. Dies ist der Grund, weshalb die ACC's und ihre Zellen abstrakt heißen. Wenn eine Zelle e' eine andere Zelle e'' berandet, dann heißt e' eine *Seite* von e'' . Seiten einer abstrakten Zelle e'' sind *keine Teilmengen* von e'' : Der Durchschnitt von je zwei verschiedenen abstrakten Zellen ist immer leer, was bei euklidischen Zellen nicht der Fall ist.

Maximale Dimension der Zellen eines ACC heißt seine *Dimension*. Wir betrachten hier ACC's der Dimensionen 2 bis 4. Ihre Zellen der Dimension 0 (0-Zellen) heißen *Punkte*, Zellen der Dimension 1 (1-Zellen) heißen *Cracks*, Zellen der Dimension 2 (2-Zellen) heißen *Pixel* und die der Dimension 3 sind *Voxel*. Die 4-Zellen haben keinen speziellen Namen.

Definition 2: Ein *Teilkomplex* $S = (E', B', dim')$ eines gegebenen ACC's $C = (E, B, dim)$ ist ein ACC, dessen Menge E' eine Teilmenge von E und die Relation B' ein Durchschnitt von B mit $E' \times E'$ ist. Die Dimension dim' ist gleich der dim für alle Zellen von E' .

Definition 3: Eine Teilmenge OS von Zellen eines Teilkomplexes S von einem ACC C heißt *offen in S* wenn OS jede Zellen von S enthält, die von einer Zelle aus OS berandet wird.

In der Topologie der Komplexe existiert der Begriff der *kleinsten offenen Umgebung* einer Zelle:

Definition 3a: Die kleinste Teilmenge einer Menge S , welche die Zelle $c \in S$ enthält und offen in S ist, heißt die *kleinste offene Umgebung von c bezüglich S* und wird mit $SON(c, S)$ bezeichnet.

Definition 4: Die *Begrenzung* $Fr(S, C)$ eines Teilkomplexes S des ACC's C *relativ zu C* ist der Teilkomplex von C , der jede Zelle c von C enthält, deren $SON(c, C)$ Zellen sowohl aus S als auch aus dem Komplement $C-S$ enthält.

Definition 5: Zwei Zellen e' und e'' aus einem ACC C heißen *miteinander inzident in C* genau dann, wenn entweder $e'=e''$, oder e' berandet e'' , oder e'' berandet e' .

Definition 6: Zwei Zellen e' und e'' aus einem ACC C heißen *miteinander zusammenhängend in C* genau dann, wenn entweder e' ist inzident mit e'' , oder es gibt in C eine Zelle c , die sowohl mit e' als auch mit e'' zusammenhängend ist. Laut dieser *rekursiven* Definition ist die Relation des Zusammenhangs ein transitive Hülle der Inzidenzrelation.

Es ist leicht zu sehen, daß der Zusammenhang nach Definition 6 eine Äquivalenzrelation ist (reflexiv, symmetrisch und transitiv). Sie definiert eine Zerteilung eines ACC's C in Äquivalenzklassen. Diese heißen *Komponenten von C* .

Definition 7: Ein ACC, der aus einer einzigen Komponente besteht, heißt *zusammenhängend*.

Definition 8: Ein Weg in einem ACC C der Form

$$x_0^n x_1^{n-1} x_2^n \dots x_{l-1}^{n-1} x_l^n$$

wobei x_i^n eine n -dimensionale und x_i^{n-1} eine $(n-1)$ -dimensionale Zelle von C ist, heißt ein n -dimensionaler Weg in C . Ein n -dimensionaler ACC C heißt *stark zusammenhängend*, wenn zwei beliebige n -dimensionale Zellen aus C mit einem n -dimensionalen Weg in C verbunden werden können.

Definition 9: Zwei ACC's heißen zu einander B-isomorph, wenn es eine eindeutige Abbildung zwischen ihren Zellen gibt, welche die Berandungsrelation, aber nicht die Dimension erhält.

Definition 10: Ein n -dimensionaler ACC C heißt *homogen n -dimensional*, wenn jede k -dimensionale Zelle von C , $k < n$, mit einer n -Zelle von C inzident ist.